Cálculo II – 2020/2021

Aula 17
①/2

Planificação **Aula 17** (presencial)

TP4D-1: 5ª feira, 13/05, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 13/05, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 14/05, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 12/05, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 14/05, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 17 a 20 — Extremos Condicionados

Objetivo: Determinar os extremantes de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em D, que satisfazem a condição $g(x,y)=0$ $\rightsquigarrow$ Max/Min $f(x,y)$ sujeito a $g(x,y)=0$

Método dos Multiplicadores de Lagrange (M.M.L.)

↳ usa-se para determinar extremos condicionados

Teorema: Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em D e $C = \{(x,y) \in D : g(x,y) = k\}$, para algum $k \in \mathbb{R}$ dado.
Se $p = (x_0,y_0) \in C$ é um extremante da restrição de f a C e $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$.

Notas:
- O teorema anterior também é válido para n variáveis (ver slide 18)
- $\lambda \in \mathbb{R}$ chamam-se multiplicadores de Lagrange.

Geometricamente: Se $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$ e $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$ então (x_0,y_0) é o ponto onde a curva de nível de f é tangente à curva $g(x,y)=k$.
(ver slide 17 e ficheiro geogebra enviado por email)

Procedimento

1.º Passo: Resolver o sistema $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$, com $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$.

2.º Passo: Verificar se existem pontos tais que $\nabla g(x,y) = (0,0)$ e $g(x,y) = k$.

3.º Passo: Calcular o valor de f nos pontos encontrados nos passos 1 e 2 e ver quais são os extremos.

Exercício 1: Considere a função $f(x,y) = 4x + 6y$ e a circunferência $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\}$.

a) Justifique que f possui extremos globais no conjunto C.

b) Calcule os extremos de f em C.

Exercício 2: Calcule os extremos condicionados de $f(x,y) = x^2 y$ no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 6\}$.

Exercício 3: Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=4$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(3,1,-1)$.

TPCs: Folha prática 3: 32, 33, 34, 39

2.º Teste, 19/06/2019 → Ex. 1

Ex. Recurso, 02/07/2018 → Ex. 5

Ex. Final, 22/06/2017 → Ex. 3

Aula 17

1) $f(x,y) = 4x + 6y \qquad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\}$

a) C é um conjunto fechado e limitado, logo pelo Teo. Weierstrass f possui extremos globais em C.

b) Usar Método dos Multiplicadores de Lagrange

$f(x,y) = 4x + 6y$ sujeito a $\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)} = \underbrace{\boxed{13}}_{k}$

1.º Passo: Resolver o sistema $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{df}{dx}(x,y) = \lambda \times \frac{dg}{dx}(x,y) \\ \frac{df}{dy}(x,y) = \lambda \times \frac{dg}{dx}(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$ com $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$

C. aux. $\frac{df}{dx} = 4$; $\frac{df}{dy} = 6$; $\frac{dg}{dx} = 2x$; $\frac{dg}{dy} = 2y$

$\begin{cases} 4 = \lambda \times 2x \\ 6 = \lambda \times 2y \\ x^2+y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{2\lambda} = \frac{2}{\lambda} \\ y = \frac{6}{2\lambda} = \frac{3}{\lambda} \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ \lambda^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ \lambda = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

→ $\lambda \neq 0$ (se $\lambda = 0$ o sistema é impossível)

Temos 2 pontos: $(2;3)$ e $(-2,-3)$

2.º Passo: Verificar se existem pontos tais que $\nabla g(x,y) = (0,0)$ e $\boxed{g(x,y) = k}$ → $x^2+y^2 = 13$

$\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow 0^2 + 0^2 = 13 \Leftrightarrow 0 = 13$ Falso

Não existem pontos

3.º Passo: Calcular o valor de f nos pontos encontrados nos pontos 1 e 2 e ver quais são os extremos

$f(2,3) = 4 \times 2 + 6 \times 3 = 26 \rightsquigarrow$ Máximo global

$f(-2,-3) = 4 \times (-2) + 6 \times (-3) = -26 \rightsquigarrow$ Mínimo global

2) $f(x,y)=x^2y \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+2y^2=6\}$

1.º Passo: C. aux $\frac{df}{dx}=2xy$; $\frac{df}{dy}=x^2$, $\frac{dg}{dx}=2x$, $\frac{dg}{dy}=4y$

$$\begin{cases}2xy=\lambda 2x\\ x^2=\lambda 4y\\ x^2+2y^2=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x(y-\lambda)=0\\ \_\_\_\_\\ \_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=0\\ \_\_\_\_\\ \_\_\_\_\end{cases} \vee \begin{cases}y-\lambda=0\\ \_\_\_\_\\ \_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ 4\lambda y=0\\ 2y^2=6\end{cases} \vee \begin{cases}y=\lambda\\ x^2=4y^2\\ 4y^2+2y^2=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \_\_\_\_\\ y=\pm\sqrt{3}\end{cases} \vee \begin{cases}\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\\ y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \lambda=0\\ y=\pm\sqrt{3}\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=1\\ x^2=4\times 1^2\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=-1\\ x^2=4\times(-1)^2\\ y=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \lambda=0\\ y=\pm\sqrt{3}\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=1\\ x=\pm 2\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=-1\\ x=\pm 2\\ y=-1\end{cases}$$

6 pontos: $(0,\sqrt{3})$; $(0,-\sqrt{3})$; $(2,1)$; $(-2,1)$; $(2,-1)$; $(-2,-1)$

2.º Passo: Não existem (T.P.C.)

3.º Passo:

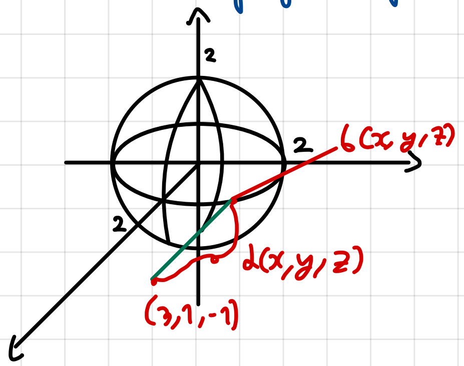
$f(0,\sqrt{3})=0$

$f(0,-\sqrt{3})=0$

$$\boxed{\begin{matrix} f(2,1)=4 \\ f(-2,1)=4 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} f(2,-1)=-4 \\ f(-2,-1)=-4 \end{matrix}}$$

Máximo global — Mínimo global

3) Pontos da superfície esférica de eq. $x^2+y^2+z^2=4$ que estão mais próximo e mais distante de $(3,1,-1)$



Distancia de um ponto $P=(x,y,z)$ ao ponto $(3,1,-1)$

$\rightarrow d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$

Maximizar/Minimizar $d(x,y,z)$ é equivalente a maximizar/minimizar $(d(x,y,z))^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$

Problema pedido: Max/Min $f(x,y,z)=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$

Sujeito a $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g(x,y)}=4$

Usar Método dos Multiplicadores de Lagrange

Simplificar: (quando der)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 \\ &= x^2-6x+9+y^2-2y+1+z^2+2z+1 \quad x^2+y^2+z^2=4 \\ &= 4-6x+9-2y+1+2z+1 \\ &= -6x-2y+2z+15 \end{aligned}$$

1º Passo: $\frac{df}{dx} = -6$; $\frac{df}{dy} = -2$; $\frac{df}{dz} = 2$; $\frac{dg}{dx} = 2x$; $\frac{dg}{dy} = 2y$; $\frac{dg}{dz} = 2z$

$$\begin{cases} -6 = \lambda 2x \\ -2 = \lambda 2y \\ 2 = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/\lambda \\ y = -1/\lambda \\ z = 1/\lambda \\ \left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ — \\ \frac{11}{\lambda^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ — \\ \lambda^2 = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ — \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{\sqrt{11}} \\ y = \frac{2}{\sqrt{11}} \\ z = -\frac{2}{\sqrt{11}} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-6}{\sqrt{11}} \\ y = \frac{-2}{\sqrt{11}} \\ z = \frac{2}{\sqrt{11}} \\ \lambda = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

2 pontos: $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right)$ e $\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$

2º Passo: $\nabla g(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow 0^2+0^2+0^2 = 4 \Leftrightarrow 0 = 4$ Falso $\rightsquigarrow$ Não existem pontos

3º Passo: $f\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right) = -6 \times \frac{6}{\sqrt{11}} - 2 \times \frac{2}{\sqrt{11}} + 2 \times \frac{-2}{\sqrt{11}} + 15 = \frac{-44}{\sqrt{11}} + 15 \simeq 1.73 \rightarrow$ Mínimo global

$f\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right) = -6 \times \frac{-6}{\sqrt{11}} - 2 \times \frac{-2}{\sqrt{11}} + 2 \times \frac{-2}{\sqrt{11}} + 2 \times \frac{2}{\sqrt{11}} + 15 = \frac{44}{\sqrt{11}} + 15 \simeq 28,27 \rightarrow$ Máximo global

Resposta: Ponto mais próximo: $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right) \rightsquigarrow$ a distância é $\sqrt{1,73} \simeq 1.32$

Ponto mais distante: $\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right) \rightsquigarrow$ a distância é $\sqrt{28.27} \approx 5.32$